# ONDAS ESFÉRICAS

Unha *onda esférica* é unha solución das ecuaciós de Maxwell que representa campos propagándose radialmente. Neste apartado obteremos un conxunto de tales soluciós, que chamaremos *multipolos*, e expresaremos o campo electromagnçetico como combinación lineal única de multipolos.

Pola relación (3.7) sabemos que unha solución **F** da ecuación de ondas sin fontes e o seu rotacional representan campos que cumplen as ecuaciós de Maxwell no espacio libre. Así todo o problema é resolver a ecuación de ondas. Supoñamos conocida una solución da ecuación escalar

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi = 0 \tag{3.36}$$

Demostraremos que

$$\mathbf{F} = \mathbf{r}\times\nabla\psi \tag{3.37}$$

cumple a ecuación de ondas vectorial. Sumemos as identidades vectoriales

$$\nabla\times(\mathbf{r}\times\mathbf{\Phi}) = \mathbf{r}\nabla\cdot\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Phi}\nabla\cdot\mathbf{r} + (\mathbf{\Phi}\cdot\nabla)\mathbf{r} - (\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{\Phi}$$
$$\nabla(\mathbf{r}\cdot\mathbf{\Phi}) = (\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{\Phi} + (\mathbf{\Phi}\cdot\nabla)\mathbf{r} + \mathbf{r}\times\nabla\times\mathbf{\Phi} + \mathbf{\Phi}\times\nabla\times\mathbf{r}$$

aplicando as relaciós $(\mathbf{G}\cdot\nabla)\mathbf{r} = \mathbf{G}$, $\nabla\cdot\mathbf{r} = 3$, $\nabla\times\mathbf{r} = 0$ e $\nabla\cdot\nabla\psi = \nabla^2\psi$. Resulta

$$\nabla\times(\mathbf{r}\times\mathbf{\Phi}) + \nabla(\mathbf{r}\cdot\mathbf{\Phi}) = \mathbf{r}\nabla\cdot\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Phi} + \mathbf{r}\times\nabla\times\mathbf{\Phi} \tag{3.38}$$

Sustituamos $\mathbf{\Phi}$ por $\nabla\psi$ e calculemos o rotacional dos dous membros, descompoñendo o doble rotacional e sabendo que o rotacional dun gradente sempre é cero:

$$\nabla\nabla\cdot(\mathbf{r}\times\nabla\psi) - \nabla^2(\mathbf{r}\times\nabla\psi) = -\mathbf{r}\times\nabla\nabla^2\psi = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\mathbf{r}\times\nabla\psi)$$

No primeiro término $\nabla\cdot(\mathbf{r}\times\nabla\psi) = 0$. No segundo podemos intercambiar as derivadas espaciales e temporal. Finalmente, pola definición (3.37),

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{F} = 0 \tag{3.39}$$

***Potenciales de Debye***

Os campos **F** e **G** de (3.7) pódense identificar cos campos eléctrico e magnético, ou ó revés, no espacio libre sin fontes, introducindo as constantes adecuadas. **F**, pola súa definición (3.37), non tén componente radial.

En (3.38) calculamos a diverxencia dos dous membros

$$\nabla\cdot\nabla\times(\mathbf{r}\times\mathbf{\Phi}) + \nabla\cdot\nabla(\mathbf{r}\cdot\mathbf{\Phi}) = \nabla\cdot[\mathbf{r}\nabla\cdot\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Phi} + \mathbf{r}\times\nabla\times\mathbf{\Phi}] =$$
$$= \nabla\cdot\mathbf{r}\nabla\cdot\mathbf{\Phi} + \mathbf{r}\cdot\nabla\nabla\cdot\mathbf{\Phi} - \nabla\cdot\mathbf{\Phi} + \nabla\times\mathbf{\Phi}\cdot\nabla\times\mathbf{r} - \mathbf{r}\cdot\nabla\times\nabla\times\mathbf{\Phi}$$

e simplificamos o resultado por medio de relaciós xa indicadas. Queda

$$\nabla^2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{\Phi}) = 2\nabla\cdot\mathbf{\Phi} + \mathbf{r}\cdot\nabla^2\mathbf{\Phi}$$

Se o aplicamos ó campo **G** de (3.7), tendo en conta que ∇·**G** = 0 e que o laplaciano vectorial e o rotacional conmutan, chegamos a

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(\mathbf{r}\cdot\mathbf{G}) = 0 \tag{3.40}$$

O campo escalar $\psi = \mathbf{r}\cdot\mathbf{G}$ chámase *potencial de Debye*. Veremos que os potenciales **r**·**E** e **r**·**H** determinan o campo electromagnético.

### *Solución da ecuación escalar de Helmholtz en coordenadas esféricas*

A partir de agora restrinxiremos o estudio a campos monocromáticos. Con esto eliminamos a dependencia temporal e (3.36) convértese na ecuación de Helmholtz

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\psi = 0 \tag{3.17}$$

Buscaremos soluciós en variables separadas da forma

$$\psi_l\,(r,\,\theta,\,\varphi) = R_l\,(r)\;\Psi_l\,(\theta,\,\varphi).$$

$$\nabla^2\psi = \nabla\cdot\nabla\psi = \nabla\cdot\left(\Psi\nabla R + R\nabla\Psi\right) = \Psi\nabla^2 R + R\nabla^2\Psi + 2(\nabla R)\cdot(\nabla\Psi) = \Psi\nabla^2 R + R\nabla^2\Psi\ ,$$

debido a que $\nabla R$ é radial e $\nabla\Psi$ non tén compoñentes nesta dirección. Logo, multiplicando a ecuación de Helmholtz (3.40) por $r^2/R\Psi$:

$$\frac{r^2}{R_l}\nabla^2 R_l + k^2 r^2 = -\frac{r^2}{\Psi_l}\nabla^2\Psi_l$$

O primeiro membro solo depende de $r$. O segundo non depende de $r$, como se comproba a continuación, ó escribilo en coordenadas esféricas. Por ser a ecuación válida pra todo $(r,\,\theta,\,\varphi)$, os dous membros deben ser constantes. Facemos, por conveniencia,

$$\frac{r^2}{R_l}\nabla^2 R_l + k^2 r^2 = -\frac{r^2}{\Psi_l}\nabla^2\Psi_l = l(l+1) \tag{3.41}$$

A segunda igualdade queda

$$\frac{1}{sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\theta\frac{\partial\Psi_l}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{sen^2\theta}\frac{\partial^2\Psi_l}{\partial\varphi^2} + l(l+1)\Psi_l = 0$$

Se buscamos de novo soluciós en variables separadas $\Psi_l\,(\theta,\,\varphi) = \Theta_{lm}\,(\theta)\;\Phi_m\,(\varphi)$:

$$\frac{sen\theta}{\Theta_{lm}}\frac{d}{d\theta}\left(sen\theta\frac{d\Theta_{lm}}{d\theta}\right) + l(l+1)\mathrm{sen}^2\theta = -\frac{1}{\Phi_m}\frac{d^2\Phi_m}{d\varphi^2}$$

O segundo membro depende solo de $\varphi$. O primeiro non tén ningunha dependencia de $\varphi$. Como as variables $\theta$ e $\varphi$ son independentes, a única posibilidade que hai é que sean constantes:

$$\begin{gathered}\frac{sen\theta}{\Theta_{lm}}\frac{d}{d\theta}\left(sen\theta\frac{d\Theta_{lm}}{d\theta}\right) + l(l+1)\mathrm{sen}^2\theta = m^2\\ \frac{1}{\Phi_m}\frac{d^2\Phi_m}{d\varphi^2} = -m^2\end{gathered} \tag{3.42}$$

Se esiximos que $\Phi_m$ sea univaluada e continua pra todo $\varphi$, $m$ debe ser un número inteiro. Tomouse unha constante negativa $-\,m^2$ pra que as soluciós fosen funciós circulares e non hiperbólicas, que non cumplirían os requisitos pedidos. Con esto:

$$\Phi_m(\varphi) = e^{\pm im\varphi} \tag{3.43}$$

A primeira ecuación divídese por $\mathrm{sen}^2\theta$ e dá a ecuación de Legendre:

$$\frac{1}{sen\theta}\frac{d}{d\theta}\left(sen\theta\frac{d\Theta_{lm}}{d\theta}\right)+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{sen^2\theta}\right]\Theta_{lm}=0 \tag{3.44}$$

As soluciós son $\Theta_{lm}(\theta, \varphi) = P_{lm}(\cos\theta)$ onde $P_{lm}$ son as *funciós asociadas de Legendre*, que se definen como

$$\begin{gathered} P_{lm}(x)=(-1)^m\left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x) \\ P_{l,-m}(x)=(-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_{lm}(x) \end{gathered} \tag{3.45}$$

(con $l$ e $m$ positivos), sendo $P_l(x)$ os *polinomios de Legendre*. Da definición resulta obvio que $|m| \leq l$ (porque pra $m > l$ a derivada faise cero)

As soluciós da ecuación angular <u>con índices $l$, $m$ definidos</u> chámanse *harmónicos esféricos*, $Y_{lm}$. Son, en forma normalizada:

$$\begin{gathered} Y_{lm}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_{lm}(\cos\theta)\,e^{im\varphi} \\ Y_{l,-m}=(-1)^m Y^*_{lm} \end{gathered} \tag{3.46}$$

e representan a dependencia angular da solución.

A ecuación radial

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\left[k^2r^2-l(l+1)\right]R_l=0$$

transfórmase, co cambio de variable $R=\dfrac{Z}{\sqrt{r}}$, na *ecuación de Bessel*:

$$\frac{d^2Z}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dZ}{dr}+\left[k^2-\frac{(l+1/2)^2}{r^2}\right]Z=0 \tag{3.47}$$

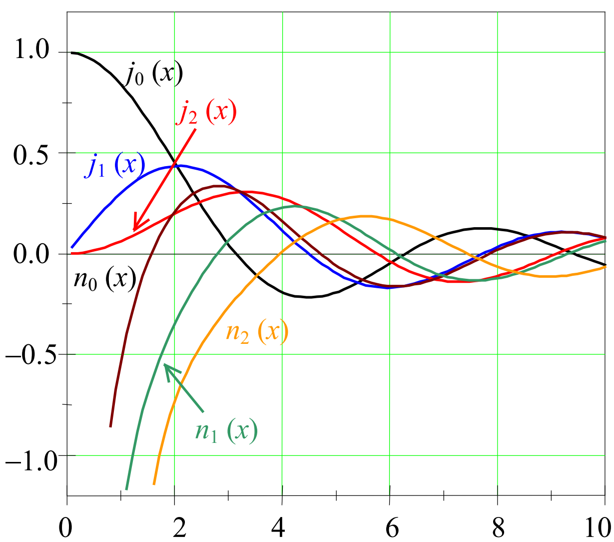


Fig. 3.7

e as súas soluciós son as *funciós de Bessel de primeira e segunda especie* (chamadas tamén *funciós de Bessel* e *de Neumann*, respectivamente) $J_{l+½}(kr)$ e $N_{l+½}(kr)$. No caso que estamos estudiando é máis conveniente usar as *funciós esféricas de Bessel e Neumann* (fig. 7):

$$\begin{gathered} j_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{l+½}(x) \\ n_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}N_{l+½}(x) \end{gathered} \tag{3.48}$$

As funciós $j_l$ teñen límite finito en $x = 0$. En cambio as $n_l$ diverxen. Pero a combinación

$$h_l^{(2)}(x)=j_l(x)-in_l(x) \tag{3.49}$$

chamada *función esférica de Hankel de segunda especie* é adecuada pra representar ondas que se alonxan do orixen de coordenadas (ondas salintes). A función radial $R_l$ é unha combinación lineal:

$$R_l = a_l j_l(kr) + b_l n_l(kr) = a_l' h_l^{(1)}(kr) + b_l' h_l^{(2)}(kr) \tag{3.50}$$

onde $h_l^{(1)}(x) = j_l(x) + i n_l(x)$ representaría unha onda entrante. Xuntando todo o visto construimos a solución xeneral:

$$\psi(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \{A_{lm} j_l(kr) + B_{lm} n_l(kr)\} Y_{lm}(\theta,\varphi), \tag{3.51}$$

### *Multipolos*

Os campos $\mathbf{E}_{lm}^{(M)}$ e $\mathbf{H}_{lm}^{(E)}$, salvo constantes, pódense identificar con **F** en (3.37):

$$\mathbf{r} \times \nabla \psi_{lm} = R_l \mathbf{r} \times \nabla Y_{lm}$$

Os outros campos $\mathbf{E}_{lm}^{(E)}$ e $\mathbf{H}_{lm}^{(M)}$, que dan o nome ó multipolo, resultan do rotacional

$$\nabla \times (R_l \mathbf{r} \times \nabla Y_{lm}) = R_l \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla Y_{lm}) + (\nabla R_l) \times (\mathbf{r} \times \nabla Y_{lm})$$

Do doble producto vectorial queda solo $(\mathbf{r} \cdot \nabla R_l) \nabla Y_{lm}$. O outro término calcúlase directamente seguindo a línea lóxica:

$$\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla Y_{lm}) + \nabla(\mathbf{r} \cdot \nabla Y_{lm}) = -\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r} l(l+1) Y_{lm} - \nabla Y_{lm},$$

porque $\frac{r^2}{Y_{lm}} \nabla^2 Y_{lm} = -l(l+1)$ por (3.41). Dado que $\mathbf{r} \cdot \nabla Y_{lm} = 0$,

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla \psi_{lm}) &= R_l \left\{ -\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r} l(l+1) Y_{lm} - \nabla Y_{lm} \right\} - (\mathbf{r} \cdot \nabla R_l) \nabla Y_{lm} = \\
&= -\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r} l(l+1) R_l Y_{lm} - \frac{d}{dr}(r R_l) \nabla Y_{lm}
\end{aligned}$$

Sea **G** o campo eléctrico ou magnético en cuestión. Por ser $\nabla Y_{lm} \perp \mathbf{r}$, $\mathbf{r} \cdot \mathbf{G} = l(l+1)\psi_{lm}$. Logo $(\nabla^2 + k^2)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}) = 0$ e $(\nabla^2 + k^2)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{H}) = 0$;

Desta maneira podemos identificar os campo $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$ e $\mathbf{r} \cdot \mathbf{H}$, cun potencial de Debye $\psi_{lm} = R_l Y_{lm}$ e definir os *multipolos eléctricos* e *magnéticos* impoñendo as condiciós:

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_{lm}^{(E)} &= -\frac{Z_0}{k} l(l+1) R_l^* Y_{lm}^* \\
\mathbf{r} \cdot \mathbf{H}_{lm}^{(E)} &= 0
\end{aligned}\right\} \quad , \quad \left.\begin{aligned}
\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_{lm}^{(M)} &= 0 \\
\mathbf{r} \cdot \mathbf{H}_{lm}^{(M)} &= \frac{1}{k} l(l+1) R_l^* Y_{lm}^*
\end{aligned}\right\} \tag{3.52}$$

Con esto, os campos multipolares escríbese de forma explícita [1]:

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{H}_{lm}^{(E)} &= i R_l^* \mathbf{r} \times \nabla Y_{lm}^* \\
\mathbf{E}_{lm}^{(E)} &= -\frac{Z_0}{kr} \left[ \hat{\mathbf{r}}\, l(l+1) R_l^* Y_{lm}^* + \frac{d}{dr}(r R_l^*) r \nabla Y_{lm}^* \right]
\end{aligned}\right\} \tag{3.53}$$

[1] Obsérvese que estes campos non teñen dimensiós de campo eléctrico e magnético .

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E}_{lm}^{(M)} &= iZ_0 R_l^* \mathbf{r} \times \nabla Y_{lm}^* \\ \mathbf{H}_{lm}^{(M)} &= \frac{1}{kr}\left[\hat{\mathbf{r}}\, l(l+1) R_l^* Y_{lm}^* + \frac{d}{dr}(rR_l)\, r\, \nabla Y_{lm}^*\right] \end{aligned}\right\} \qquad (3.54)$$

***Exemplo 3.2***

O multipolo "non dexenerado" máis simple tén $l = 1$, $m = 0$, que corresponde á onda xenerada por un dipolo oscilante $\mathbf{p} = \hat{\mathbf{z}}\, p$ ou $\mathbf{m} = \hat{\mathbf{z}}\, m$. Cos datos

$$h_1^{(2)}(kr) = -\frac{e^{-ikr}}{kr}\left(1 - \frac{i}{kr}\right) \quad ; \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$$

obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{10}^{(E)} &= -Z_0 \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{ie^{-ikr}}{kr}\left\{\hat{\mathbf{r}}\left[\frac{-i}{kr} - \frac{1}{(kr)^2}\right] 2\cos\theta + \hat{\boldsymbol{\theta}}\left[1 - \frac{i}{kr} - \frac{1}{(kr)^2}\right] \operatorname{sen}\theta\right\} \\ \mathbf{H}_{10}^{(E)} &= -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{ie^{-ikr}}{kr}\left(1 - \frac{i}{kr}\right) \operatorname{sen}\theta \end{aligned} \qquad (3.55)$$

***Desenrolo multipolar do campo electromagnético***

A *relación de completitude* dos harmónicos esféricos

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta,\varphi) Y_{lm}^*(\theta',\varphi') = \delta(\cos\theta - \cos\theta')\delta(\varphi - \varphi') \qquad (3.56)$$

asegura que podemos descompoñer calquera función angular $\Psi(\theta, \varphi)$ nunha combinación lineal de harmónicos esféricos, porque

$$\Psi(\theta,\varphi) = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \Psi(\theta',\varphi')\delta(\theta-\theta')\delta(\varphi-\varphi')\, d\varphi' d\theta' = \oint \Psi(\theta',\varphi')\delta(\cos\theta - \cos\theta')\delta(\varphi-\varphi')\, d\Omega',$$

facendo o cambio de variable $\delta \circ \xi(x) = \sum_{\xi(x_i)=0} \frac{1}{|\xi'|}\delta(x - x_i)$ ($\xi'$ é a derivada de $\xi$). Consideremos superficies esféricas [2] $S$ e $S'$ de radio $r$ con centro no orixen e sea $\Psi = \mathbf{r}\cdot\mathbf{E}|_S$:

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}\big|_S = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*(\theta,\varphi) \int_{S'} \mathbf{r}'\cdot\mathbf{E}\big|_{S'} Y_{lm}(\theta',\varphi')\, d\Omega'$$

Da integral sobre $\Omega'$ resulta un coeficiente *constante*. En (3.53),

$$Y_{lm}^* = -\frac{k\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}_{lm}^{(E)}}{l(l+1) Z_0 R_l^*}$$

Sustituindo

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{E} = \sum_{lm} A_{lm}^{(E)} \mathbf{r}\cdot\mathbf{E}_{lm}^{(E)}$$

onde os coeficientes veñen dados por

[2] O mesmo conxunto de puntos pero expresados en función de oordenadas sin e con prima.

$$Z_0 R_l^*(r) A_{lm}^{(E)} = -\frac{k}{l(l+1)} \int Y_{lm} \mathbf{r}' \cdot \mathbf{E} d\Omega \tag{3.57}$$

De igual maneira de (3.54) obtemos $\mathbf{r} \cdot \mathbf{H} = \sum_{lm} A_{lm}^{(M)} \mathbf{r} \cdot \mathbf{H}_{lm}^{(M)}$ , con

$$R_l^*(r) A_{lm}^{(M)} = \frac{k}{l(l+1)} \int Y_{lm} \mathbf{r}' \cdot \mathbf{H} d\Omega' \tag{3.58}$$

Os multipolos eléctricos (3.53) contribúen ós campos **E** e **H**, e outro tanto hai que dicir dos magnéticos (3.54). Polo tanto o *desenrolo multipolar* completo será

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \sum_{l,m} \left\{ A_{lm}^{(E)} \mathbf{E}_{lm}^{(E)} + A_{lm}^{(M)} \mathbf{E}_{lm}^{(M)} \right\} \\ \mathbf{H} &= \sum_{l,m} \left\{ A_{lm}^{(E)} \mathbf{H}_{lm}^{(E)} + A_{lm}^{(M)} \mathbf{H}_{lm}^{(M)} \right\} \end{aligned} \tag{3.59}$$

***Exemplo 3.3***

Supoñendo o dipolo oscilante do exemplo anterior, no límite $kr \to 0$ tense o campo estático

$$\mathbf{E}|_{kr\to 0} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^3} \left( \hat{\mathbf{r}}\, 2\cos\theta + \hat{\boldsymbol{\theta}} \operatorname{sen}\theta \right)$$

Considerando unha superficie esférica de radio $r \to 0$, a partir de (3.57),

$$-Z_0 A_{10}^E = \lim_{r\to 0} \left\{ \frac{1}{h_{10}^{(2)}(kr)} \frac{k}{2} \oint_S Y_{10}\, r E_r d\Omega \right\} =$$

$$= \frac{k}{2} \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \lim_{r\to 0} \left\{ \frac{r}{\frac{e^{-ikr}}{kr}\left(1 - \frac{i}{kr}\right)} \frac{1}{r^3} \right\} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} 2\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta\, d\varphi\, d\theta = i \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{pk^3}{4\pi\varepsilon_0}$$

(os demáis coeficientes $A_{lm}$, tanto eléctricos como magnéticos, son cero), de onde os campos do dipolo eléctrico oscilante, a partir de (3.53) e (3.57), resultan

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{pk^3}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^{-ikr}}{kr} \left\{ \hat{\mathbf{r}} \left[ \frac{-i}{kr} - \frac{1}{(kr)^2} \right] 2\cos\theta + \hat{\boldsymbol{\theta}} \left[ 1 - \frac{i}{kr} - \frac{1}{(kr)^2} \right] \operatorname{sen}\theta \right\} \\ \mathbf{H} &= -\frac{1}{Z_0} \frac{pk^3}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^{-ikr}}{kr} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \left( 1 - \frac{i}{kr} \right) \operatorname{sen}\theta \end{aligned} \tag{3.60}$$